©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 199–211

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

© Österreichische Akademie der Wissenschaften 1999
Printed in Austria

Seitenstücke der Wallace-Geraden

Von

O. Giering

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 12. November 1998
durch das k. M. Oswald Giering)

Abstract

If one draws, in an Euclidean plane from a point X the perpendiculars onto the sides AB, BC, CA of a triangle ABC and if the feet of these perpendiculars $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ lie on a line – the Wallace line of X– then X lies on the circumcircle u of the triangle ABC. In this paper we investigate not only the collinearity of the feet P, Q, R but also the collinearity of the intersection points $P' \in BC, Q' \in CA, R' \in AB$ as well as $P'' \in CA, Q'' \in AB, R'' \in BC$ of the three perpendiculars with the other sides of a triangle ABC (see Fig. 2). It is shown that with regard to P', Q', R' a conic k' and with regard to P'', Q'', R'' a conic k'' corresponds to the circumcircle u. The conics k', k'' are of the same affine type and give reason to a new remarkable point D and two new remarkable lines of a triangle ABC with central conics resp. hyperbolas k', k'' The conics k', k'' and the circumcircle u are elements of the same pencil of conics. For equilateral triangles ABC we get additional results.

Einleitung

Fällt man in der euklidischen Ebene von einem Punkt X die Lote auf die Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks ABC (Abb. 1) und liegen die Lotfußpunkte $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ auf einer Geraden – der Wallace-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

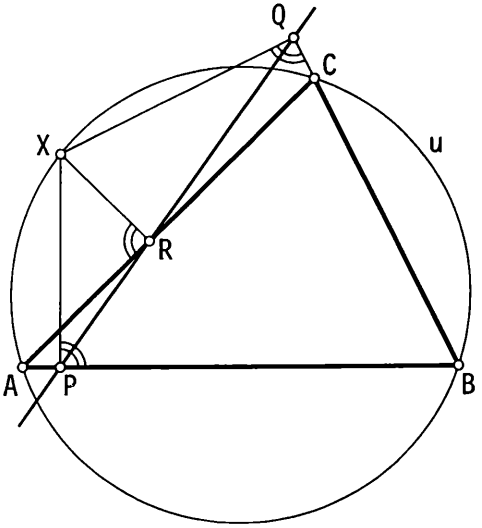

Abb. 1

Geraden[1] von X zum Dreieck ABC – so liegt X auf dem Umkreis u des Dreiecks ABC[2] Liegt umgekehrt X auf u, so sind P, Q, R kollinear.

Im folgenden betrachten wir die Schnittpunkte der Lote XP, XQ, XR mit *sämtlichen Seiten* des Dreiecks ABC, also die Punkte (Abb. 2):

$$\begin{aligned} P &:= XP \cap AB, & P' &:= XP \cap BC, & P'' &:= XP \cap CA, \\ Q &:= XQ \cap BC, & Q' &:= XQ \cap CA, & Q'' &:= XQ \cap AB, \\ R &:= XR \cap CA, & R' &:= XR \cap AB, & R'' &:= XR \cap BC. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Punkte P', Q', R' liegen nach (1) auf jenen Dreieckseiten, die bei der *Rechts*-Durchlaufung $A \to B \to C \to A$ des Dreiecks ABC den Seiten, welche die Lotfußpunkte P, Q, R tragen, unmittelbar folgen. Dasselbe gilt für P'', Q'', R'' bei der *Links*-Durchlaufung $A \to C \to B \to A$ des Dreiecks ABC.

Während die Frage nach kollinearen *Lotfußpunkten* P, Q, R durch den Satz über die Wallace-Geraden geklärt ist, scheint die Frage nach kollinearen *Lotschnittpunkten* P', Q', R' bzw. P'', Q'', R'' in der Literatur bisher keine Beachtung gefunden zu haben. Wir untersuchen daher die

[1] Nach William Wallace 1797, siehe [5], S. 143; [1], S. 1234; [2], S.45; [4], S. 855. Dieselbe Gerade tritt in der Literatur auch als Simson-Gerade auf.

[2] Eine affine und eine projektive Verallgemeinerung dieser Aussage findet man in [3]. Die Lotfußpunkte P, Q, R von X sind übrigens genau dann kollinear, wenn die Spiegelpunkte von X an den Dreieckseiten kollinear sind (zentrische Streckung aus X!).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

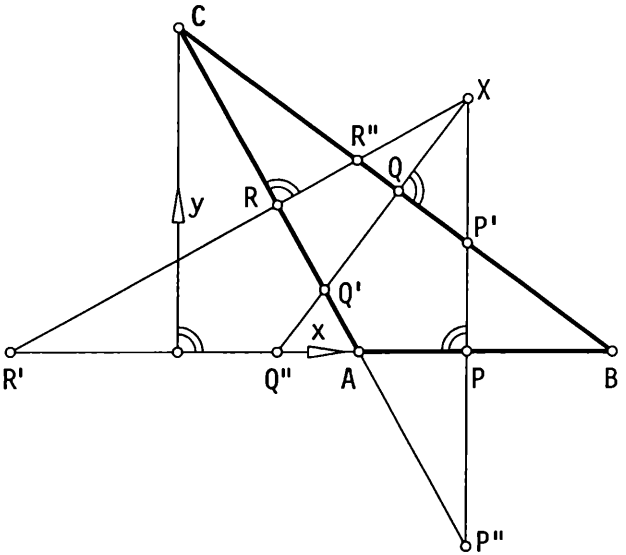

Abb. 2

Kollinearität der Punkte P', Q', R' sowie der Punkte P'', Q'', R'' Bei kollinearen Punkten P', Q', R' nennen wir ihre Trägergerade die *Wallace-Rechtsgerade* $[P'Q'R']$ *des Punktes* X *zum Dreieck* ABC, bei kollinearen Punkten P'', Q'', R'' die *Wallace-Linksgerade* $[P''Q''R'']$ *des Punktes* X *zum Dreieck* ABC. Wir beweisen darüber die in Satz 1 für allgemeine Dreiecke und die in Satz 2 für gleichseitige Dreiecke zusammengefaßten Aussagen.

1. Allgemeine Dreiecke

Wir beziehen das Dreieck ABC auf das in Abb.2 verwendete kartesische xy-Koordinatensystem und geben den Ecken A, B, C die Koordinaten $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$. Ohne Einschränkung ist $a < b, 0 < c$. Für einen gegebenen Punkt $X(\xi, \eta)$ berechnet man die Koordinaten der zugehörigen Lotschnittpunkte $P', Q', R', P'', Q'', R''$:

$$
\begin{aligned}
&P'(x_{P'}, y_{P'}) \quad \textit{mit} \quad x_{P'} = \xi, && y_{P'} = -\frac{c}{b}(\xi - b),\\
&Q'(x_{Q'}, y_{Q'}) \quad \textit{mit} \quad x_{Q'} = \frac{c^2 + b\xi - c\eta}{c^2 + ab}a, && y_{Q'} = \frac{ab - b\xi + c\eta}{c^2 + ab}c,\\
&R'(x_{R'}, y_{R'}) \quad \textit{mit} \quad x_{R'} = \xi - \frac{c}{a}\eta, && y_{R'} = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

sowie

$$
\begin{aligned}
&P''(x_{P''}, y_{P''}) \quad \textit{mit} \quad x_{P''} = \xi, && y_{P''} = -\frac{c}{a}(\xi - a),\\
&Q''(x_{Q''}, y_{Q''}) \quad \textit{mit} \quad x_{Q''} = \xi - \frac{c}{b}\eta, && y_{Q''} = 0,\\
&R''(x_{R''}, y_{R''}) \quad \textit{mit} \quad x_{R''} = \frac{c^2 + a\xi - c\eta}{c^2 + ab}b, && y_{R''} = \frac{ab - a\xi + c\eta}{c^2 + ab}c.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Nach (2) und (3) ergeben sich die Koordinaten der Punkte P'', Q'', R'' in dieser Reihenfolge aus den Koordinaten der Punkte P', Q', R', indem man a mit b vertauscht und c, ξ, η beibehält.

Die Lotschnittpunkte P', Q', R' liegen genau dann kollinear (auf der Wallace-Rechtsgeraden von X zum Dreieck ABC), wenn der Inhalt des Dreiecks $P'Q'R'$ verschwindet, wenn also gilt:

$$
\begin{vmatrix} x_{P'} & y_{P'} & 1 \\ x_{Q'} & y_{Q'} & 1 \\ x_{R'} & y_{R'} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}
$$

Aus (4) folgt mit (2) unter Verwendung von $T := a^2 - ab + b^2 - c^2$, daß die Koordinaten ξ, η notwendig der Gleichung

$$
acx^2 + Txy - bcy^2 - ac(a+b)x - b(a^2 - c^2)y + a^2bc = 0 \tag{5}
$$

genügen müssen. Entsprechend liegen P'', Q'', R'' genau dann kollinear (auf der Wallace-Linksgeraden von X zum Dreieck ABC), wenn

$$
\begin{vmatrix} x_{P''} & y_{P''} & 1 \\ x_{Q''} & y_{Q''} & 1 \\ x_{R''} & y_{R''} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}
$$

Daraus folgt, daß die Koordinaten ξ, η notwendig die Gleichung

$$
bcx^2 + Txy - acy^2 - bc(a+b)x - a(b^2 - c^2)y + ab^2c = 0 \tag{7}
$$

erfüllen müssen. Man zeigt unschwer die Umkehrung: Liegt X auf dem durch (5) gegebenen Kegelschnitt k' bzw. auf dem durch (7) gegebenen Kegelschnitt k'', so liegen P', Q', R' bzw. P'', Q'', R'' kollinear. Wir nennen k' den *Rechtskegelschnitt* und k'' den *Linkskegelschnitt* des Dreiecks ABC[3]. Man verifiziert unmittelbar, daß die Dreiecksecken A, B, C sowohl auf k' als auch auf k'' liegen (Abb. 3).

[3] Ersichtlich liefert eine Kollinearitätsbedingung (4) bzw. (6) als Ort der Punkte $X(\xi, \eta)$ stets einen Kegelschnitt, wenn die in (4) bzw. (6) auftretenden Koordinaten lineare Funktionen von ξ und η sind.

Schneidet man (nach projektiver Erweiterung der euklidischen Ebene) den Rechtskegelschnitt k' und den Linkskegelschnitt k'' mit der Ferngeraden, so zeigt sich, daß die Fernpunkte dieser Kegelschnitte festgelegt sind durch

$$x : y = (-T \pm \sqrt{T^2 + 4abc^2}) \quad 2pc \text{ mit } p = a \text{ für } k', p = b \text{ für } k'' \tag{8}$$

Nach (8) handelt es sich bei nichtzerfallenden Kegelschnitten k' und k'' stets um *Kegelschnitte gleichen Typs* und zwar um eine *Ellipse* (oder einen Kreis), eine *Parabel* bzw. eine *Hyperbel*, je nachdem

$$T^2 + 4abc^2 \lesseqgtr 0. \tag{9}$$

Beachtet man, daß gilt:

$0 < a < b$ für jedes stumpfwinklige Dreieck ABC (ohne Einschränkung stumpfwinklig bei A),
$a = 0$ für jedes rechtwinklige Dreieck ABC (ohne Einschränkung rechtwinklig bei A),
$a < 0 < b$ für jedes spitzwinklige Dreieck,

so folgt aus (8) und (9): Für jedes stumpfwinklige Dreieck ABC sind die Kegelschnitte k' und k'' Hyperbeln (Abb. 3). Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC zerfallen k' und k'' wegen $a = 0$ in ein Geradenpaar.[4] Für ein spitzwinkliges Dreieck ABC sind als Kegelschnitte k' und k'' Ellipsen, Parabeln[5] und Hyperbeln möglich.

Sind k', k'' *Mittelpunktskegelschnitte* mit den Mittelpunkten $M'(\xi', \eta'), M''(\xi'', \eta'')$, so findet man als Koordinaten:

$$\xi' = \frac{b(a^2 - c^2)T + 2abc^2(a+b)}{T^2 + 4abc^2}, \quad \eta' = \frac{ac(a+b)T - 2abc(a^2 - c^2)}{T^2 + 4abc^2}, \tag{10}$$

$$\xi'' = \frac{a(b^2 - c^2)T + 2abc^2(a+b)}{T^2 + 4abc^2}, \quad \eta'' = \frac{bc(a+b)T - 2abc(b^2 - c^2)}{T^2 + 4abc^2}. \tag{11}$$

---

[4] Untersucht man allgemein den Zerfall von k' und k'', so stellt sich einheitlich für beide Kegelschnitte neben $a = 0$ die Bedingung $c^2 = -ab$ ein, also erneut ein *rechtwinkliges Dreieck* ABC, lediglich rechtwinklig bei C.

[5] Wir verzichten auf eine detaillierte Diskussion des Parabel-Falles, die sich bei der Auswertung von $T^2 + 4abc^2 = 0$ (siehe (9)) leicht durchführen läßt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Werden k', k'' aus dem xy-Koordinatensystem in ein x^*y^*-Koordinatensystem auf Hauptachsen transformiert und wird dabei die x- in die x^*-Achse um den Winkel ψ gedreht, so ergibt sich für *beide* Kegelschnitte k', k'':

$$\tan 2\psi = \frac{T}{(a+b)c}. \tag{12}$$

Man entnimmt aus (12), daß die Kegelschnitte k', k'' *parallele Achsen* besitzen (Abb. 3). Das von den Achsen der Kegelschnitte k', k'' definierte Rechteck besitzt die Mittelpunkte M', M'' als Gegenecken. Die beiden andern Gegenecken seien N_1 und N_2. Die Gegenecken N_1, N_2 heißen im folgenden die *Gegenpunkte* der Kegelschnitte k', k''

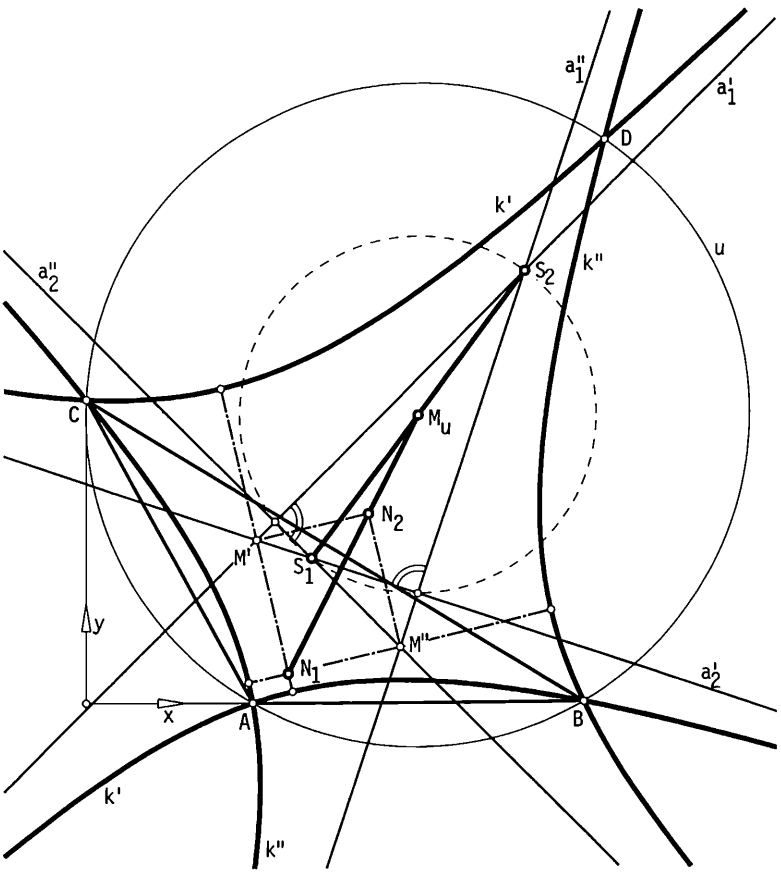

Abb. 3

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir betrachten nun neben den Kegelschnitten k', k'' den Umkreis u des Dreiecks ABC, der die Gleichung

$$x^2 + y^2 - (a+b)x - \frac{1}{c}(ab + c^2)y + ab = 0 \tag{13}$$

und in xy–Koordinaten den Mittelpunkt $M_u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right)$ besitzt. Gibt man den Mittelpunkten M', M'', M_u in dem nach (12) um den Winkel ϕ gedrehten xy–Koordinatensystem die Koordinaten $M'(x', y')$, $M''(x'', y''), M_u(x_u, y_u)$, so sind die Gegenpunkte der Kegelschnitte k', k'' gegeben durch $N_1(x', y''), N_2(x'', y')$. Eine längere elementare Rechnung zeigt, daß N_1, N_2, M_u die Kollinearitätsbedingung

$$\begin{vmatrix} x' & y'' & 1 \\ x'' & y' & 1 \\ x_u & y_u & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

erfüllen (Abb. 3). Die *Gegenpunkte* N_1, N_2 der Kegelschnitte k', k'' und der *Umkreismittelpunkt* M_u eines Dreiecks ABC liegen folglich *kollinear*. Die Gerade $[N_1 N_2 M_u]$ zählt somit zu den *merkwürdigen Geraden* eines Dreiecks ABC mit Mittelpunktskegelschnitten k', k''

Sind k', k'' *Hyperbeln*, so folgt aus (8) und (9), daß *jede Asymptote von* k' *eine Asymptote von* k'' *orthogonal trifft* (Abb. 3). Seien a'_1, a'_2 die Asymptoten von k' und a''_1, a''_2 die Asymptoten von k''. Die zueinander orthogonalen Asymptoten seien $a'_1, a''_2 (a'_1 \perp a''_2)$ und $a''_1, a'_2 (a''_1 \perp a'_2)$. Dann besitzen die Asymptotenschnittpunkte

$$S_1(x_{S_1}, y_{S_1}) := a'_1 \cap a''_1, \quad S_2(x_{S_2}, y_{S_2}) := a'_2 \cap a''_2 \tag{15}$$

die Koordinaten

$$x_{S_1} = \frac{\eta'' - \eta' + \Gamma_b \xi' - \Gamma_a \xi''}{\Gamma_b - \Gamma_a}, \quad y_{S_1} = \frac{\Gamma_b \eta'' - \Gamma_a \eta' + \Gamma_a \Gamma_b (\xi' - \xi'')}{\Gamma_b - \Gamma_a}, \tag{16}$$

$$x_{S_2} = \frac{\eta'' - \eta' + \Omega_b \xi' - \Omega_a \xi''}{\Omega_b - \Omega_a}, \quad y_{S_2} = \frac{\Omega_b \eta'' - \Omega_a \eta' + \Omega_a \Omega_b (\xi' - \xi'')}{\Omega_b - \Omega_a}; \tag{17}$$

dabei findet man (ξ', η') in (10), (ξ'', η'') in (11) und mit $W := \sqrt{T^2 + 4abc^2}$ gilt:

$$\Gamma_a := \frac{T + W}{2ac}, \Gamma_b := \frac{T + W}{2bc}, \Omega_a := \frac{T - W}{2ac}, \Omega_b := \frac{T - W}{2bc}. \tag{18}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Eine einfache Rechnung zeigt, daß der *Umkreismittelpunkt* M_u *der Mittelpunkt der Strecke* S_1S_2 ist. Damit liegen S_1, S_2, M_u *kollinear* und die orthogonalen Asymptoten a_1', a_2'' und a_1'', a_2' schneiden einander auf dem Kreis über der Strecke S_1S_2 (Abb. 3). Die Gerade $[S_1S_2M_u]$ zählt somit zu den *merkwürdigen Geraden* eines Dreiecks ABC mit Hyperbeln k', k''

Das von k' und k'' aufgespannte *Kegelschnittbüschel* $\lambda k' + \mu k''$ besitzt die Dreiecksecken A,B,C als (allen Büschelkegelschnitten gemeinsame) *Grundpunkte*. Der ebenfalls allen Büschelkegelschnitten gemeinsame vierte Grundpunkt D ist ein *merkwürdiger Punkt* eines Dreiecks ABC und besitzt die Koordinaten

$$x_D = \frac{c^2(a+b)^2 + (ab - c^2)T}{c^2(a+b)^2 + T^2}(a+b), \quad y_D = \frac{T}{c(a+b)}x_D + c. \quad (19)$$

Das Kegelschnittbüschel $\lambda k' + \mu k''$ enthält für $\lambda = 1, \mu = -1$ den Umkreis u des Dreiecks ABC. Die Mittelpunkte der Mittelpunktskegelschnitte im Kegelschnittbüschel $\lambda k' + \mu k''$ liegen (wie man leicht nachprüft) selbst auf einem Kegelschnitt.

Fällt der Punkt $X(\xi, \eta)$ in einen der Grundpunkte A,B,C,D, dann sind die zugehörigen Lotfußpunkte P, Q, R sowie die Lotschnittpunkte P', Q', R' und P'', Q'', R'' jeweils kollinear.

Weitere ausgezeichnete Punkte der Kegelschnitte k' und k'' liegen auf den Höhen h_A, h_B, h_C des Dreiecks ABC. Einfaches Nachrechnen liefert als Punkte von k'

$$\begin{aligned} T'_{AB} &:= h_A \cap (\text{Lot in } B \text{ auf } AB), \\ T'_{BC} &:= h_B \cap (\text{Lot in } C \text{ auf } BC), \\ T'_{CA} &:= h_C \cap (\text{Lot in } A \text{ auf } CA) \end{aligned} \quad (20)$$

und als Punkte von k''

$$\begin{aligned} T''_{AB} &:= h_B \cap (\text{Lot in } A \text{ auf } AB), \\ T''_{BC} &:= h_C \cap (\text{Lot in } B \text{ auf } BC), \\ T''_{CA} &:= h_A \cap (\text{Lot in } C \text{ auf } CA). \end{aligned} \quad (21)$$

Die drei Geraden $T'_{AB}T''_{CA} = h_A$, $T'_{BC}T''_{AB} = h_B$, $T'_{CA}T''_{BC} = h_C$ schneiden einander im Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

Zusammenfassend ergibt sich

Satz 1. *Fällt man in der euklidischen Ebene von einem Punkt X die Lote auf die Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks ABC, so gilt:*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(a) *Die Lotfußpunkte* $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ *liegen genau dann kollinear – auf der Wallace-Geraden* $[PQR]$ *von* X *zum Dreieck* ABC *–wenn* X *auf dem Umkreis des Dreiecks* ABC *liegt.*

(b) *Die Lotschnittpunkte* P', Q', R' *(siehe* (1)*) liegen genau dann kollinear – auf der Wallace-Rechtsgeraden* $[P'Q'R']$ *von* X *zum Dreieck* ABC*–wenn* X *auf dem Rechtskegelschnitt* k' *des Dreiecks* ABC *liegt.*

(c) *Die Lotschnittpunkte* P'', Q'', R'' *(siehe* (1)*) liegen genau dann kollinear – auf der Wallace-Linksgeraden* $[P''Q''R'']$ *von* X *zum Dreieck* ABC *– wenn* X *auf dem Linkskegelschnitt* k'' *des Dreiecks* ABC *liegt.*

(d) k' *und* k'' *sind Umkegelschnitte des Dreiecks* ABC.

(e) k' *und* k'' *sind Kegelschnitte desselben affinen Typs.*

(f) *Sind* k' *und* k'' *Mittelpunktskegelschnitte, so gehört zu jeder Achse von* k' *eine parallele Achse von* k'' *Die Gegenpunkte* N_1, N_2 *der Kegelschnitte* k', k'' *und der Umkreismittelpunkt* M_u *des Dreiecks* ABC *liegen kollinear (Abb. 3).*

(g) *Sind* k' *und* k'' *Hyperbeln* (k' *mit den Asymptoten* a'_1, a'_2 *und* k'' *mit den Asymptoten* a''_1, a''_2), *so trifft jede Asymptote von* k' *eine Asymptote von* k'' *orthogonal (etwa* $a'_1 \perp a''_2, a''_1 \perp a'_2$). *Die Asymptotenschnittpunkte* $S_1 = a'_1 \cap a''_1$, $S_2 = a'_2 \cap a''_2$ *und der Umkreismittelpunkt* M_u *des Dreiecks* ABC *liegen kollinear (Abb. 3).*

(h) k' *und* k'' *liegen mit dem Umkreis des Dreiecks* ABC *in demselben Kegelschnittbüschel. Die Dreiecksecken* A, B, C *sind Grundpunkte dieses Büschels; der vierte Grundpunkt* D *ist ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks* ABC *(Abb. 3).*

2. Gleichseitige Dreiecke

Der Rechtskegelschnitt k' stimmt genau dann mit dem Umkreis des Dreiecks ABC überein, wenn ABC ein gleichseitiges Dreieck ist und damit $b = -a, c = a\sqrt{3}$. Entsprechendes gilt für den Linkskegelschnitt k'' und für die Übereinstimmung von k' mit k'' In einem gleichseitigen Dreieck ABC existieren daher zu *jedem* Punkt $X(\xi, \eta)$ seines Umkreises die Wallace-Gerade $[PQR]$, die Wallace-Rechtsgerade $[P'Q'R']$ und die Wallace-Linksgerade $[P''Q''R'']$ (Abb. 4). Für jedes gleichseitige Dreieck ABC sind die Dreiecke $Q''XR', R''XP', P''XQ'$ nach Konstruktion gleichschenklig; ihre Basiswinkel an den von X verschiedenen Ecken betragen $\pi/6$.

Wir betrachten nun in einem gleichseitigen Dreieck ABC das aus den Geraden $[PQR]$, $[P'Q'R']$, $[P''Q''R'']$ gebildete Dreiseit mit den Ecken:

$$\begin{aligned} S &:= [P'Q'R'] \cap [P''Q''R''], \\ T &:= [PQR] \cap [P'Q'R'], \\ U &:= [P''Q''R''] \cap [PQR]. \end{aligned} \tag{22}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Gibt man den Ecken des Dreiecks ABC die Koordinaten $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$, so erhält sein Umkreis (mit dem Mittelpunkt $M_u(0,\frac{1}{3}\sqrt{3})$) die Gleichung

$$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2=\frac{4}{3}. \tag{23}$$

Bei Verwendung des Winkels φ, den der laufende Umkreisradius M_uX mit der positiven x-Achse einschließt, erhält der Umkreis (23) die Parameterdarstellung

$$\xi=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\varphi,\quad \eta=\frac{1}{3}\sqrt{3}(1+2\sin\varphi), \tag{24}$$

die sich rationalisieren läßt mit

$$t:=\tan\frac{\varphi}{2},\cos\varphi=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin\varphi=\frac{2t}{1+t^2}. \tag{25}$$

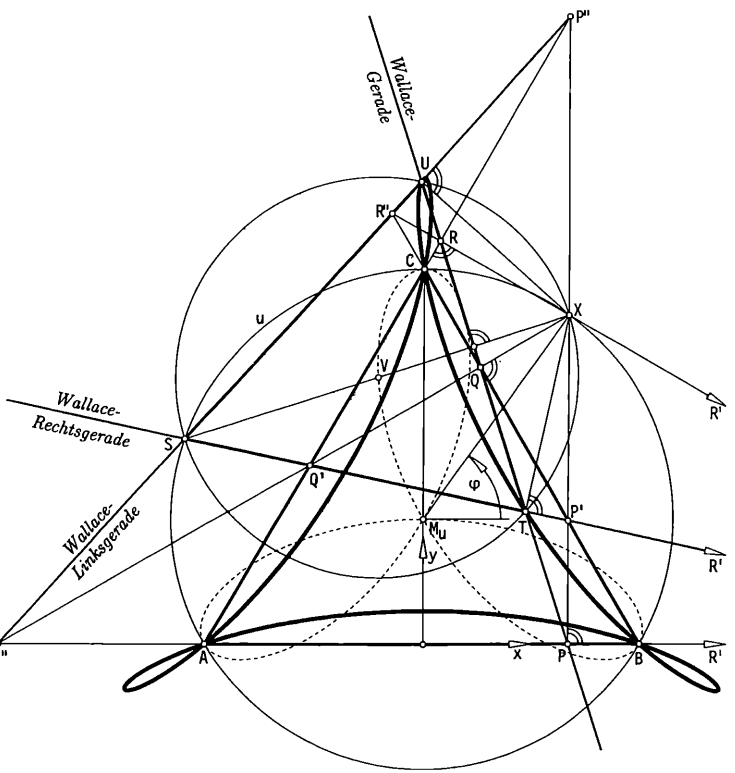

Abb. 4

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die drei Geraden $[PQR]$, $[P'Q'R']$ und $[P''Q''R'']$ besitzen die Gleichungen (in denen (24) und (25) zu beachten sind):

$$y(3\xi + \sqrt{3}\eta - 3) = (x - \xi)(\sqrt{3}\xi - 3\eta - \sqrt{3}) \quad \text{(Wallace-Gerade}[PQR]), \tag{26}$$

$$\eta y = (\xi - 1)(x - \eta - \sqrt{3}\eta) \quad \text{(Wallace-Rechtsgerade}[P'Q'R']), \tag{27}$$

$$\eta y = (\xi + 1)(x - \eta + \sqrt{3}\eta) \quad \text{(Wallace-Linksgerade}[P''Q''R'']). \tag{28}$$

Man berechnet daraus die Koordinaten der Punkte $S(x_S, y_S)$, $T(x_T, y_T)$ und $U(x_U, y_U)$:

$$x_S = \xi(1 - \sqrt{3}\eta), \qquad y_S = \sqrt{3}(1 - \xi^2), \tag{29}$$

$$x_T = \frac{\sqrt{3}(1-\xi)\eta}{\omega\eta - \xi + 1} + \xi, \quad y_T = \frac{\sqrt{3}(1-\xi)\eta}{\omega\eta - \xi + 1}\omega, \tag{30}$$

$$x_U = \frac{\sqrt{3}(1+\xi)\eta}{\omega\eta - \xi - 1} + \xi, \quad y_U = \frac{\sqrt{3}(1+\xi)\eta}{\omega\eta - \xi - 1}\omega, \tag{31}$$

mit

$$\omega := \frac{\sqrt{3}\xi - 3\eta - \sqrt{3}}{3\xi + \sqrt{3}\eta - 3} = \frac{t+1}{t-1} \quad \text{(Steigung der Geraden } TU). \tag{32}$$

Wie einfache Rechnungen zeigen, liegt der Schnittpunkt S der Wallace-Rechtsgeraden $[P'Q'R']$ mit der Wallace-Linksgeraden $[P''Q''R'']$ stets auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und es gilt stets (Abb. 4):

$$SX \perp TU, \quad UX \perp US, \quad TX \perp TS. \tag{33}$$

Längere, jedoch elementare Rechnungen lassen erkennen, daß STU für jeden Umkreispunkt X ein *gleichseitiges Dreieck* ist. Für die Seitenlänge (etwa TU) folgt mit (30), (31), (32) sowie (24) und (25):

$$(TU)^2 = 12\eta^2(\omega^2 + 1)\frac{[\xi(\omega\eta - \xi) + 1]^2}{[(\omega\eta - \xi)^2 - 1]^2} = 2\frac{(t^2 + 4t + 1)^2(t-1)^2}{(t^2+1)^3}. \tag{34}$$

Aus (34) folgt, daß das Dreieck STU genau für verschwindende Seitenlänge TU, also für $X = A$, $X = B$ und $X = C$ in einen Punkt entartet und zwar in A, B bzw. C.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Durchläuft X den Umkreis des Dreiecks ABC, so durchläuft die Ecke U des Dreiecks STU eine geschlossene, dreiachsig symmetrische, rationale Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten (Knoten), mit der aus (31) unter Verwendung von (32), (24) und (25) folgenden Parameterdarstellung:

$$x_U = \frac{(\sqrt{3}-3)(t-1)(t-\sqrt{3}+2)(t^2-4\sqrt{3}-7)-4\sqrt{3}(t^4-1)}{6(t^2+1)^2} \tag{35}$$

$$y_U = \frac{(\sqrt{3}-3)(t+1)(t-\sqrt{3}+2)(t^2-4\sqrt{3}-7)}{6(t^2+1)^2}. \tag{36}$$

Zugleich durchläuft die Ecke T des Dreiecks STU dieselbe geschlossene rationale Kurve 4. Ordnung, nunmehr mit der aus (30) unter Verwendung von (32), (24) und (25) folgenden Darstellung:

$$x_T = \frac{(\sqrt{3}+3)(t-1)(t+\sqrt{3}-2)(t^2+4t+1)-4\sqrt{3}(t^4-1)}{6(t^2+1)^2} \tag{37}$$

$$y_T = \frac{(\sqrt{3}+3)(t+1)(t+\sqrt{3}-2)(t^2+4t+1)}{6(t^2+1)^2}. \tag{38}$$

Man erkennt unmittelbar. daß der laufende Punkt X auf dem Umkreis des zugehörigen Dreiecks STU liegt; SX ist ein Durchmesser dieses Umkreises. Sein Mittelpunkt V läuft ebenfalls auf einer geschlossenen rationalen Kurve 4. Ordnung. Für diese Bahnkurve, die den Umkreismittelpunkt M_U des Dreiecks ABC als dreifachen Punkt besitzt, ermittelt man die Darstellung:

$$x_V = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\frac{(t^2-1)(t^2-4t+1)}{(t^2+1)^2},\ y_V = \frac{2}{3}\sqrt{3}t\,\frac{t^2+4t+1}{(t^2+1)^2}. \tag{39}$$

Zusammenfassend gilt:

Satz 2. *In einem gleichseitigen Dreieck ABC existieren zu jedem Punkt X seines Umkreises u die Wallace-Gerade, die Wallace-Rechtsgerade und die Wallace-Linksgerade. Für jeden Punkt $X \in u$ bilden diese Geraden die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks STU (das für $X = A$, $X = B$ und $X = C$ in die Dreiecksecken A, B, C entartet). Durchläuft X den Umkreis u, so durchläuft auch S (der Schnittpunkt der Wallace-Rechtsgeraden mit der Wallace-Linksgeraden) den Umkreis u. Die Ecken T und U durchlaufen*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dieselbe geschlossene, dreiachsig symmetrische rationale Kurve 4. Ordnung mit drei Knoten (Abb. 4).

Dank

Der Verfasser dankt Herrn Dr. Hermann Vogel für seine Mithilfe bei der Herstellung der Abbildungen.

Literatur

[1] Berkhan, G., Meyer, W. Fr.: Neuere Dreiecksgeometrie. In: Enzykl. d. math. Wiss., Bd. III, 1. Teil, 2. Hälfte, 10.III.34. Leipzig: B. G. Teubner (1914 – 1931).
[2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: Zeitlose Geometrie. Stuttgart; E. Klett 1983.
[3] Giering, O.: Affine and projective generalization of Wallace lines. J. Geom. Graph. **1**, 119 – 133 (1997).
[4] Naas, J., Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch, Bd. II. Berlin; Akademie-Verlag, Stuttgart; B. G. Teubner 1972.
[5] Simon, M.: Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig; B. G. Teubner 1906.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. O. Giering, TU München, Zeutrum Mathematik, Arcisstraße 21, D-80333 München.